



## APUNTES SOBRE AEROFOTOGRAMETRÍA

Por el Teniente Coronel ROMERO-GIRÓN

La fotografía y sus continuas aplicaciones han modificado profundamente los métodos de representación del terreno en planos y cartas; en la actualidad, y gracias a ella, estos métodos son mucho más rápidos y económicos.

La representación del terreno por los métodos topográficos ordinarios se realiza mediante la determinación de puntos aislados y mediciones de las distancias que los unen; de esta forma se van creando unas redes de triángulos o polígonos que constituyen las redes geodésicas de primero o segundo orden, cuando se trate de representar grandes extensiones (geodesia). Cada punto se determina con la mayor *exactitud y precisión*, dejándose marcado en el terreno como punto de partida para trabajos posteriores.

En levantamientos de menor extensión, y que deban reflejar con detalle todos los accidentes importantes del terreno y elementos principales que caracterizan la zona a levantar (topografía), es preciso aumentar la densidad de las redes, para las que pueden servir de puntos de apoyo los ya conocidos de la red geodésica. La situación y altura de los puntos, así como sus distancias, se obtienen mediante los datos proporcionados por los aparatos de trabajo en el campo, como brújulas, taquímetros, teodolitos, etc. La información y relleno del terreno contenido entre estos puntos se completa por medio de croquis de las zonas visibles desde cada punto; en estos croquis se señalan todas cuantas indicaciones y datos puedan ser utilizables posteriormente en el trabajo de gabinete.

La toma de datos para la representación por los métodos topográficos ordinarios ha de realizarse necesariamente sobre el terreno, y forzosamente tendrán que situarse los equipos que salen al campo sobre los puntos a determinar,

lo que representa, en primer lugar, una gran lentitud en el trabajo, sobre todo en zonas muy montañosas, y en segundo lugar, el estar sometidos a las inclemencias del tiempo, según la estación del año en que se opere, y a otras propias del lugar, como dificultades de comunicación, albergues, etc. Dificultades y molestias que producen cansancio en los equipos y pueden reflejarse en la exactitud de los trabajos realizados.

La segunda parte se realiza en el gabinete reuniendo todos los datos obtenidos por los equipos de campo para efectuar la representación gráfica de las redes de triangulación y polígonos, situación de los puntos, zonas de relleno y todos los detalles necesarios, mediante el empleo de signos o símbolos convenidos.

Por regla general, los locales donde se realizan todos estos trabajos están apartados de las zonas de terreno a levantar (y a su vez, los especialistas del trabajo de gabinete son distintos de los que formaron los equipos de campo), por lo que desaparece o no existe una sensación de la imagen real del terreno, valiéndose únicamente de ligeros esquemas de algunas zonas de trabajo.

Económicamente este método tiene grandes inconvenientes; en primer lugar, es muy lento, como ya quedó expuesto, y en segundo lugar, necesita desplazamientos y permanencias de personal fuera de sus habituales puntos de residencia, dietas, etc. Todo ello representa un coste más elevado por kilómetro cuadrado levantado en comparación con los métodos fotogramétricos.

Utilizando la fotografía, se obtiene una visión constante y real de la imagen del terreno; además, sobre ella se pueden realizar mediciones con la mayor comodidad y ab-

soluta independencia de las inclemencias atmosféricas, puesto que estas medidas se realizan en el gabinete y en caso necesario se pueden volver a comprobar.

Por otra parte, en el terreno se determinan únicamente puntos aislados, y el aumento de su densidad, en beneficio de la representación cartográfica, eleva considerablemente el precio y aumenta su lentitud. En la fotografía, y debido a los modernos aparatos fotogramétricos, se puede recorrer la imagen del terreno de una manera continuada y reflejar, por tanto, todos sus accidentes con mayor realidad. Se puede decir que con la fotografía se ha conseguido llevar el terreno al gabinete, en donde con la mayor tranquilidad y comodidad pueden completarse y comprobarse todas las mediciones.

Se comprende, por tanto, que desde la aparición de la fotografía se estudie constantemente su aplicación para los fines cartográficos, procurando mejorar todos aquellos aparatos o elementos que contribuyan a obtener ésta en las mejores condiciones de nitidez y distorsión, así como los que obtienen los datos, mediciones, etc., con mayor exactitud y precisión. De esta forma se ha mejorado enormemente la óptica de las cámaras fotográficas, así como estas mismas, las emulsiones de las películas, etc., y en cuanto a los aparatos de gabinete, se han construido muchos modelos de gran precisión y manejo automático.

Primeramente se aplicó la fotografía en tierra, dando nacimiento a la fotogrametría terrestre, ciencia a la que desde sus iniciadores (A. Laussedat, en Francia, y Meydenbauer, en Alemania) hasta la actualidad, muchos técnicos y profesores han dedicado su actividad, consiguiendo alcanzar grandes progresos y perfeccionar notablemente los métodos cartográficos.

Más recientemente, la aparición del avión ha abierto un nuevo y extenso campo en la fotogrametría. La posibilidad de montar cámaras fotogramétricas en los aviones y obtener desde la altura fotografías en las que el terreno aparece con análoga representación que la que proporcionan los planos usuales, facilita y amplía considerablemente el campo de acción de la fotografía.

Entre la fotogrametría terrestre y la aérea existen diferencias que significan ventajas para una u otra, según los casos. Así la fotogrametría terrestre no puede prescindir del desplazamiento del operador al terreno, y aunque ahorra mucho trabajo en relación al método topográfico, no por ello deja de ser lenta y costosa; por otra parte, obteniendo las fotografías desde el propio terreno, aun cuando los aparatos se sitúen en alturas y puntos dominantes, no es posible evitar zonas ocultas, como tampoco se puede evitar que, aun cuando las bases sean de gran longitud, los últimos términos aparezcan bajo ángulos de intersección muy agudos, falseándose su situación. Estos son sus principales inconvenientes en comparación con la fotogrametría aérea (en adelante, aerofotogrametría). La fotografía obtenida desde el aire, elevándose muy por encima de los obstáculos de la naturaleza, elimina completamente las zonas de ocultación, proporcionando al mismo tiempo una visión muy similar a la de la carta. Por otra parte, el desplazamiento hacia la zona del terreno está libre de obstáculos y se realiza rápidamente, lo que permite levantar grandes extensiones en poco tiempo.

El método fotogramétrico terrestre presenta como ventajas el conocimiento de la orientación externa o colocación

que tenía la cámara fotográfica en el momento de la impresión de la vista, ya que la cámara se fija al trípode del teodolito, que determina con toda precisión los datos de situación. El aerofotogramétrico presenta la gran dificultad de no conocer en el instante de la toma de la vista la posición del avión con relación al terreno, ni la postura exacta de éste en el aire, es decir, la orientación externa de la cámara.

Con los estudios y continuos progresos que se realizan actualmente en el terreno aeronáutico, llegará un día en que sean determinados los elementos hasta ahora desconocidos. Cuando esto suceda la aerofotogrametría podrá por sí sola levantar zonas extensas de terreno sin puntos de apoyo o apoyándose en los vértices geodésicos; es decir, que en tiempos no lejanos la medida de la tierra se realizará desde el aire.

## PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Las cámaras fotográficas pueden ocupar en el espacio, con relación al terreno, infinidad de posiciones; pero todas ellas pueden reducirse a dos: fotografías obtenidas en posición vertical de la cámara (con el objetivo vertical), que son las que interesan para los estudios aerofotogramétricos—efectuadas con cámaras fotográficas verticales de características especiales, fijas en el avión—, y las oblicuas, obtenidas con cámaras fotográficas de mano, que lleva el operador. Sin embargo, con la cámara vertical se pueden obtener fotografías oblicuas, bien por voluntad del operador, bien involuntariamente, debido a una posición incorrecta del avión en el instante de la impresión.

El ideal de los trabajos de aerofotogrametría es operar con fotografías exactamente verticales; sin embargo, es muy difícil conseguirlo en la práctica, y se admiten como fotografías verticales aquellas cuyo eje óptico tenga una determinada inclinación. Pasada ésta se deben considerar dentro del grupo de las oblicuas, aunque no fueran obtenidas con cámara de mano. En vuelos aerofotogramétricos correctos, y para levantamientos de planos dentro de límites estrechos de tolerancia, se suelen admitir inclinaciones máximas de 3°; sin embargo, los aparatos aerofotogramétricos de gabinete permiten la restitución de fotografías de mayor inclinación, pero deben evitarse siempre que sea posible.

Considerando, pues, únicamente a las fotografías verticales preparadas para los trabajos aerofotogramétricos, en ellas aparecen, en la parte media de sus lados, unas marcas (figura 1) impresionadas al mismo tiempo que la imagen, y cuya unión indica con exactitud la proyección sobre su superficie del centro del objetivo, dato esencial para el conocimiento de la "orientación interna" de la fotografía que en adelante, y para las que llevan dichos índices, se denominarán "aerofotogramas", para distinguirlas de las fotografías dedicadas a otros usos.

De las relaciones que existan entre los aerofotogramas y el objeto o terreno se han de deducir las dimensiones altimétricas y planimétricas de éste, y para ello es preciso que estas relaciones obedezcan a leyes geométricas determinadas, que serían exactas si el objetivo pudiera materializarse en un punto; entonces por este punto pasarían todos los rayos de luz que han de impresionar el aerofotograma; pero los objetivos fotográficos están compuestos de varias lentes, y aunque en su conjunto funcionen como una sola, de la que se han eliminado o disminuido algunas de las aberraciones,



Fig. 1.

poseen longitudes apreciables, que han de atravesar los rayos efectuando determinados recorridos. Sin embargo, en la construcción de estos objetivos aerofotogramétricos se ha adelantado lo suficiente para que se pueda admitir, dentro de errores tolerables, que todos los rayos se crucen en un punto situado a la distancia focal (las cámaras aerofotogramétricas están enfocadas siempre al infinito), y que estos rayos salen hacia la imagen sin desviación apreciable dentro del campo del mismo.

Sobre esta base se establece todo el estudio aerofotogramétrico, y entonces la imagen es la correspondiente a una perspectiva central o cónica, cuyo punto de vista es el centro óptico del objetivo y cuya distancia al cuadro es la distancia focal, perfectamente conocida; se conoce también la situación de este punto con relación al cuadro por las marcas anteriormente indicadas, y, por tanto, todos los datos necesarios para la determinación de la orientación interna.

Determinadas las características (dimensiones) del cuadro o fotograma y la posición exacta del punto de vista o punto del objetivo con respecto a él, falta por determinar la posición exacta del cuadro con relación al objeto, es decir, la posición que tomó el aerofotograma en el instante mismo de su impresión con relación al terreno, o sea la "orientación externa".

Entre los inconvenientes que al principio se apuntaron a las fotogrametrías, para la aérea únicamente éste se señaló; la desventaja de la aerofotogrametría estriba únicamente en el desconocimiento de la orientación exterior de los aerofotogramas. Dos procedimientos existen para determinarla, pero los dos carecen de la exactitud que en esta ciencia se exige de sus resultados; uno de ellos estriba en la determinación de los datos necesarios en el momento mismo de la impresión, consiguiendo que en el aerofotograma aparezcan fotografiados los horizontes y un nivel, como indica la

figura 2; éste tiene el inconveniente de que los horizontes no aparecen siempre con la nitidez necesaria, y si hay sierras en los últimos términos, se falsean las indicaciones; el segundo busca el apoyo en tierra, para lo que basta con tres puntos por aerofotograma. Por procedimientos gráficos, analíticos o combinación de ambos se determina la pirámide formada por estos tres puntos y el centro objetivo, para conocer la situación de éste y la del aerofotograma. Su exactitud es función de la identificación de los tres puntos del terreno, existiendo una zona peligrosa que corresponde al caso particular en que el vértice de la pirámide coincide con el cilindro, cuya sección recta es el plano de los tres puntos, y entonces la situación del vértice se encuentra indeterminada en una zona de dicho cilindro.

La aerofotogrametría moderna con aparatos, utilizando la propiedad de la visión estereoscópica, que proporcionan pares de aerofotogramas en zonas comunes del terreno, elimina la necesidad de orientación exterior individual, acudiendo a la "orientación relativa" de los mismos; pero no evita los casos de indeterminación ni la de orientación absoluta del conjunto con relación al terreno, que necesita igualmente de los tres puntos de apoyo y que está basada en los mismos principios fundamentales.

Cualquiera que sea el método operatorio, es necesario el perfecto conocimiento de las leyes de relación existentes para las distintas posiciones que en la práctica puedan presentarse, y de las que se tratan algunas en este trabajo.

1.º Terrenos llanos horizontales.

a) Aerofotogramas verticales.

Se entiende por terreno prácticamente llano, para determinados trabajos aerofotogramétricos, aquel cuyos desniveles dentro del aerofotograma no exceden de  $1/500$  del denominador de la escala. Por ejemplo, 100 metros en la escala de  $1/50.000$ .

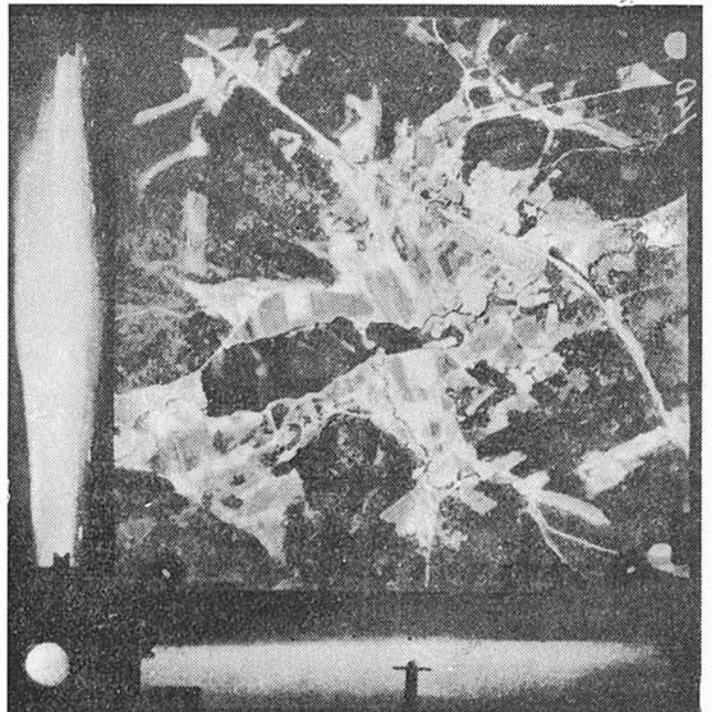


Fig. 2.

El terreno en este caso está representado por un plano paralelo al del aerofotograma (fig. 3), y la zona abarcada en él, dará una figura semejante a la de éste, limitada por las cuatro trazas con el terreno de los planos que pasando por  $O$  contienen a los lados del aerofotograma  $bc$ ,  $cd$ ,  $de$ ,  $eb$ . Cada dos de estos planos se cortarán según las rectas  $M_1$  y  $M_2$ , paralelos a la superficie del aerofotograma y a sus ejes, determinados por la unión de las indicaciones en los lados.

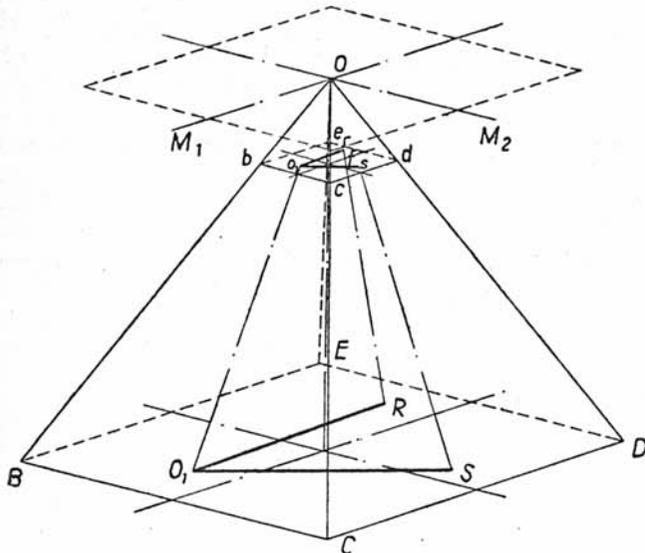


Fig. 3

A cualquier recta del terreno  $R$  le corresponderá una paralela en la imagen  $r$ , ya que serán las trazas de los planos que pasando por  $O$  cortan a dos paralelos. En consecuencia, los ángulos  $r, O_1, s$  y  $R, O_1, S$  serán iguales en valor absoluto. Es decir, que la imagen en este caso es semejante al terreno, y la relación de semejanza será la de las alturas de los planos con relación a  $O$ , o sea la relación entre la distancia focal y la altura del vuelo.

$$\frac{f}{A} \dots \dots \dots (1)$$

De esta relación (1) se determina la altura de vuelo necesaria para la elaboración de una carta o plano a escala fijada y la característica de la cámara fotográfica a emplear. Para una misma altura, cuanto menor sea la distancia focal, menor será la escala y mayor la superficie del terreno abarcada.

b) Aerofotogramas inclinados.

La cámara aerofotogramétrica se puede orientar dentro del avión de tal forma que los ejes del aerofotograma coincidan con la dirección de marcha del vuelo y su transversal. Refiriendo las inclinaciones del eje óptico a estos ejes, se puede tratar en primer lugar los casos particulares de inclinación alrededor de dichos ejes, y finalmente, el caso general de una inclinación cualquiera.

Cuando el aerofotograma se inclina alrededor del eje transversal  $y_1, y_2$ , por ejemplo (fig. 4), el eje longitudinal  $x_1, x_2$  marcará la línea de máxima pendiente y formará, con respecto a la posición horizontal, un ángulo  $\rho$  igual al de inclinación.

Las rectas  $M_1$  y  $M_2$  de la figura 3 que pasan por el objetivo ya no están contenidas en un plano paralelo al terreno, como en el caso a).

La  $M_1$  se inclina y ocupa la posición  $O O_1$  (fig. 4), formando con respecto a la horizontal el mismo ángulo de inclinación  $\rho$ , y por tanto, encontrará al plano del terreno en un punto determinado, al que concurrirán los lados de la zona abarcada del mismo. La  $M_2$  se conserva horizontal, puesto que el giro se ha efectuado alrededor del eje transversal.

La zona abarcada tendrá, por tanto, los lados transversales paralelos a los de la imagen, pero las longitudinales irán a concurrir al punto  $O_1$ , y la figura delimitada por ellos será un trapecio y no semejante a la del aerofotograma, como en el caso a).

A cualquier línea paralela al eje longitudinal en la imagen, por ejemplo,  $r$  ó  $s$ , le corresponderán en el terreno otras líneas  $R$  o  $S$ , concurrentes en el punto  $O_1$ , no paralelas. Las transversales serán paralelas, pero no iguales en longitud al estar delimitadas por los lados oblicuos del trapecio.

No existirá semejanza en este caso b) entre las líneas y figuras del terreno y sus homólogas del aerofotograma, ni será constante la escala en las distintas zonas de éste. En la figura 5, corte por el eje longitudinal de la figura 4, cada recta transversal, las proyectadas en  $b$  y  $c$ , por ejemplo, tiene su propia escala; para la  $b$ , igual a  $\frac{o b}{O B}$  y para  $c$   $\frac{o c}{O C}$  y siendo  $o b < o c$ ,  $\frac{o b}{O B} < \frac{o c}{O C}$ , es decir, que la escala es progresivamente variable a lo largo del eje longitudinal.

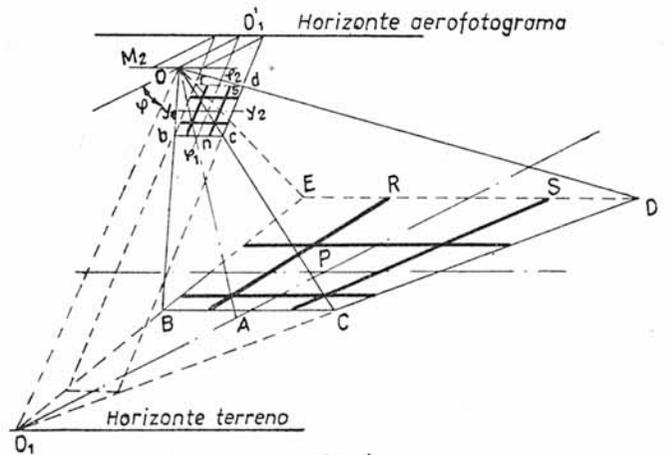


Fig. 4

Como consecuencia de esta variación de escalas, todos los puntos situados en la parte alta tendrán un acortamiento, variable según la zona en que se encuentren, y los de la parte baja un alargamiento semejante en comparación con los del aerofotograma vertical de escala constante.

Se pueden deducir los valores de estas deformaciones en función del ángulo  $\alpha$  (fig. 5), entre el punto en cuestión y el punto principal y del ángulo  $\rho$  de inclinación. Las mediciones se han de tomar desde el punto  $i_s$ , que está en la línea de corte de los dos aerofotogramas y al mismo tiempo en la

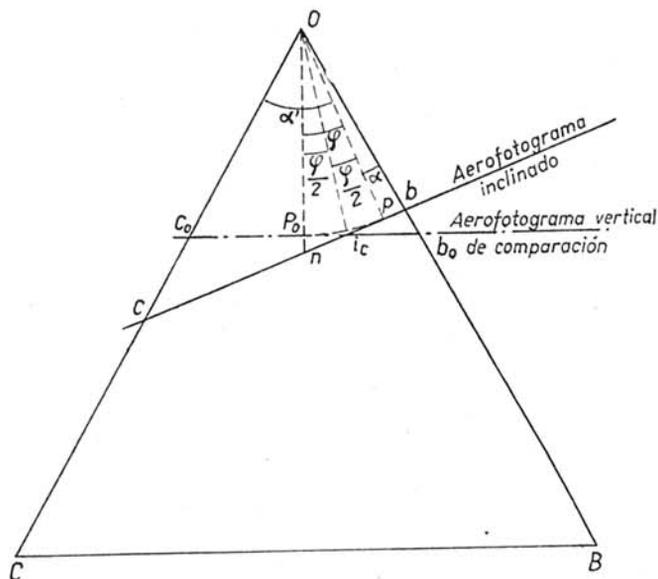


Fig. 5

línea de máxima pendiente y a una distancia del punto principal.

$$i_c = f \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \dots \dots \dots (2)$$

Este punto se denomina centro de deformación o isocentro.

Para el punto *b* la deformación es:  $d = i_c b_o - i_c b$

$$\left. \begin{aligned} i_c b_o &= p_o b_o - p_o i_c = \\ &= f \operatorname{tg} (\varphi + \alpha) - f \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \\ i_c b &= i_c p + p b = \\ &= f \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + f \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \right\} \begin{aligned} d &= f \operatorname{tg} (\varphi + \alpha) - f \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \\ &\quad - f \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - f \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

$$d = f \left[ \operatorname{tg} (\varphi + \alpha) - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right] \dots \dots \dots (3)$$

Para el punto *c* la deformación es  $d' = i_c c - i_c c_o$

$$\left. \begin{aligned} i_c c &= p c - p i_c \\ i_c c_o &= i_c p_o + p_o c_o \end{aligned} \right\} \begin{aligned} d' &= f \operatorname{tg} \alpha' - f \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - f \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \\ &\quad - f \operatorname{tg} (\alpha' - \varphi) \end{aligned}$$

$$d' = f \left[ \operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} (\alpha' - \varphi) - 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right] \dots \dots \dots (4)$$

Con estos valores para las magnitudes de las deformaciones se pueden construir tablas o gráficos con los cuales determinar rápidamente las distancias de los distintos puntos del aerofotograma al centro de deformación o isocentro.

Las tablas siguientes están calculadas para una distancia focal de 10 cms.; de esta forma, interviniendo en las fórmulas (3) y (4) su valor fuera del corchete, cuando sea distinta de la indicada bastará multiplicar los valores de estas tablas por el de la nueva distancia focal y dividir el resultado por 10.

Volviendo nuevamente a la figura 4, y suponiendo que en el terreno existen líneas paralelas al eje longitudinal, en la imagen estas líneas irán a reunirse en el punto  $O'_1$  de la

**TABLA I.**—Deformaciones en la parte superior de la imagen a partir del centro de deformación en mm.  $f = 10$  cms.

INCLINACIÓN	ANGULO DESDE EL PUNTO PRINCIPAL								
	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
10'	0.003	0.009	0.021	0.038	0.064	0.097	0.143	0.201	0.293
20	0.005	0.018	0.042	0.077	0.129	0.196	0.288	0.414	0.588
30	0.008	0.029	0.065	0.118	0.195	0.297	0.436	0.625	0.878
40	0.010	0.038	0.087	0.160	0.262	0.399	0.685	0.840	1.191
50	0.013	0.049	0.111	0.201	0.329	0.502	0.734	1.056	1.496
60	0.016	0.060	0.132	0.244	0.398	0.605	0.886	1.273	1.807
1° 10'	0.020	0.071	0.158	0.286	0.467	0.712	1.042	1.494	2.121
1 20	0.023	0.082	0.184	0.331	0.538	0.819	1.198	1.717	2.439
1 30	0.027	0.096	0.208	0.375	0.611	0.927	1.357	1.944	2.760
1 40	0.030	0.107	0.234	0.421	0.682	1.037	1.517	2.173	3.084
1 50	0.035	0.119	0.260	0.467	0.758	1.148	1.679	2.406	3.412
2 00	0.039	0.132	0.287	0.514	0.832	1.261	1.843	2.639	3.746
2 10	0.043	0.145	0.314	0.562	0.907	1.376	2.009	2.878	4.083
2 20	0.048	0.159	0.343	0.610	0.985	1.492	2.177	3.117	4.422
2 30	0.052	0.173	0.371	0.659	1.063	1.608	2.346	3.358	4.768
2 40	0.058	0.187	0.400	0.711	1.141	1.727	2.519	3.605	5.114
2 50	0.063	0.202	0.430	0.761	1.223	1.847	2.692	3.852	5.467
3 00	0.068	0.217	0.460	0.812	1.203	1.969	2.870	4.105	5.869

**TABLA II.**—Deformaciones en la parte inferior de la imagen a partir del centro de deformación en mm.  $f = 10$  cms.

INCLINACIÓN	ANGULO DESDE EL PUNTO PRINCIPAL								
	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
10'	0.002	0.009	0.021	0.039	0.061	0.096	0.140	0.203	0.289
20	0.004	0.018	0.041	0.076	0.124	0.192	0.280	0.404	0.574
30	0.006	0.026	0.060	0.113	0.185	0.285	0.421	0.605	0.857
40	0.008	0.034	0.079	0.149	0.244	0.377	0.558	0.800	1.136
50	0.009	0.041	0.099	0.185	0.305	0.468	0.692	0.994	1.412
60	0.011	0.049	0.117	0.220	0.362	0.558	0.824	1.186	1.685
1° 10'	0.012	0.056	0.135	0.254	0.421	0.648	0.955	1.377	1.956
1 20	0.013	0.063	0.152	0.286	0.475	0.735	1.087	1.563	2.223
1 30	0.014	0.070	0.169	0.320	0.531	0.822	1.215	1.748	2.484
1 40	0.015	0.076	0.185	0.352	0.585	0.906	1.342	1.931	2.746
1 50	0.016	0.082	0.202	0.384	0.639	0.990	1.466	2.112	3.003
2 00	0.017	0.088	0.217	0.414	0.692	1.074	1.589	2.291	3.257
2 10	0.018	0.093	0.232	0.445	0.743	1.154	1.711	2.468	3.510
2 20	0.018	0.099	0.247	0.475	0.794	1.236	1.832	2.642	3.757
2 30	0.019	0.104	0.261	0.503	0.845	1.313	1.950	2.814	4.004
2 40	0.019	0.108	0.276	0.532	0.894	1.392	2.066	2.983	4.245
2 50	0.019	0.113	0.289	0.560	0.942	1.470	2.183	3.152	4.484
3 00	0.020	0.117	0.302	0.587	0.990	1.545	2.297	3.317	4.723

línea de horizonte, determinada por la intersección del cuadro o su prolongación con el plano horizontal que pasa por *O*, y generalizando, rectas paralelas entre sí en el terreno (que no sean transversales) tendrán por homólogas en la imagen rectas concurrentes en el punto correspondiente de la línea de horizonte.



y sustituyendo en (5)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{b c}{i_c b_o \operatorname{sen} [90 - (\alpha + \varphi)]} = \frac{b_o c_o \cos (\alpha + \varphi)}{\cos \alpha} \\ &= \frac{b_o c_o \cos (\alpha + \varphi) \operatorname{sen} (90 + \alpha)}{i_c b_o \operatorname{sen} [90 - (\alpha + \varphi)] \cos \alpha} = \frac{b_o c_o \cos (\alpha + \varphi) \cos \alpha}{i_c b_o \cos (\alpha + \varphi) \cos \alpha} \\ &= \frac{b_o c_o}{i_c b_o} = \operatorname{tg} \theta_o ; \end{aligned}$$

luego ángulo  $\theta = \theta_o$ .

Siendo iguales todos los ángulos que en aerofotograma y terreno se miden desde los puntos isocentros de uno y otro, queda a su vez generalizado el cálculo establecido anteriormente para el valor de las deformaciones a lo largo de la línea de máxima pendiente a cualquier dirección medida desde los citados puntos.

Caso C.—Aerofotograma con una inclinación cualquiera.

Hasta ahora todos los cálculos y estudios deducidos lo han sido considerando el aerofotograma inclinado sobre el eje longitudinal, y los mismos resultados se obtendrían cuando la inclinación se realizara sobre el eje transversal, variando únicamente la posición del trapecio, y por tanto, naturalmente, la dirección de la línea de máxima pendiente y la situación de los puntos nadir e isocentro.

Cuando la inclinación no sea alrededor de ninguno de los ejes, ésta podrá descomponerse o será la resultante de una inclinación longitudinal y otra transversal; la línea de

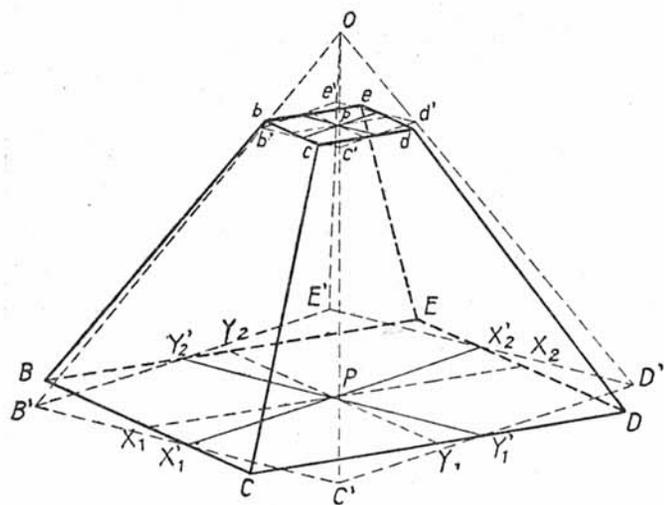


Fig. 9

máxima pendiente formará un ángulo determinado con cualquiera de estos ejes, y sobre ella se encontrarán el punto principal, que no varía, el nadir y el isocentro. Se ha producido, en realidad, un cambio de ejes, y sobre los nuevos (línea de máxima pendiente y su transversal) seguirán realizándose todas las consideraciones y cálculos anteriores.

Al mismo resultado se llega en cuanto a la posición final del aerofotograma, considerando primero un giro de éste sobre su eje óptico, suponiendo inmóviles los ejes  $\varphi_1$   $\varphi_2$  e  $y_1$   $y_2$  primitivo hasta que éstos ocupen con relación al

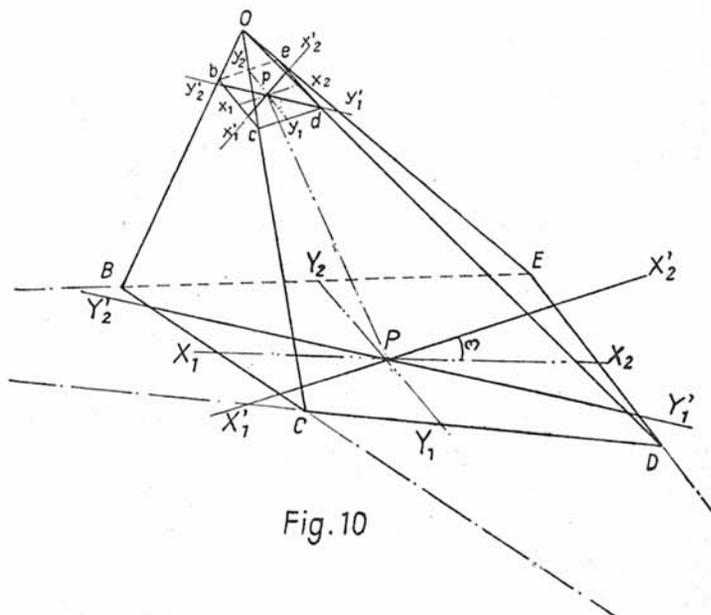


Fig. 10

mismo la nueva posición que deben tener y realizar la inclinación posteriormente en condiciones exactas al caso b).

En la figura 9 se efectúa únicamente el giro del aerofotograma hasta su nueva posición, para inclinar después (figura 10) sobre los ejes  $X'_1$   $X'_2$  e  $Y'_1$   $Y'_2$ ; entonces el trapecio se convierte en un rombo, no siendo ya paralelos ninguno de los lados; el punto de encuentro de los  $CD$  y  $BE$ , por un lado, y los  $BC$  y  $DE$  de otro, determinan una recta, que es la del horizonte del terreno, y que sería el lugar geométrico de los puntos de fuga de todas las paralelas en este caso b), con la única diferencia de que este horizonte del terreno no es ahora paralelo a ninguno de los ejes antiguos, sino al transversal formado en el nuevo sistema. Exactamente lo mismo sucede con la línea de horizonte con relación a los ejes del aerofotograma, siendo éste paralelo al nuevo eje transversal formado.

### CONSECUENCIAS

Para determinada cartografía, es decir, en las zonas en que el terreno sea llano y según los límites de apreciación que para la carta o plano se exijan, cuando los desniveles no pasen de límites determinados, con un solo aerofotograma vertical o inclinado en las condiciones establecidas, y siempre que la inclinación sea conocida, se pueden determinar sobre él la línea de máxima pendiente y los puntos principal, nadir e isocentro, y desde este último medir direcciones y distancias a todos los restantes del aerofotograma, deduciendo la proyección ortogonal o plano del terreno.

Para fotografías inclinadas, el valor de las deformaciones aumenta rápidamente: por ejemplo, con inclinación de  $10^\circ$  y para distancias angulares de  $45^\circ$ , la deformación es de 25 mm., con foco 10 cms.

Los ángulos medidos desde el isocentro se hacen cada vez más agudos, en función del alejamiento de este punto, del punto principal; así, para  $10^\circ$  será  $i_c = 10 \operatorname{tg} 10/2 = 8,75$  mm., y por tanto, menor la precisión de las mediciones efectuadas.

Estas razones limitan las inclinaciones de los aerofotogramas en función de la precisión de las mediciones obtenidas y de las exigencias de esta cartografía.