Empuje y sustentación

Por JOSE M.ª JANSÁ GUARDIOLA
Meteorólogo.

En los albores de la navegación aérea hubo una larga porfía entre el *globo,* más ligero que el aire, y el aeroplano, más pesado que el aire, entre la *aerostación* y la *aviación.* El avión ha triunfado totalmente de su rival, y las discusiones alrededor de este tema hoy no pueden tener más que un interés histórico. Sin embargo, desde el punto de vista teórico, conserva un valor considerable la comparación de los dos sistemas, reputados como inconexos si no como antagónicos.

El globo se mantiene o se eleva gracias al *empuje* hidrostático con arreglo al principio de Arquímedes; el avión, gracias a la *sustentación* engendrada por la resistencia del aire contra un cuerpo que se mueve, en su seno, en determinadas condiciones. Al parecer, el *empuje* y la *sustentación* son fuerzas heterogéneas, y si algún estudiante de Hidrodinámica las confundiere, probablemente se vería reprobado; pero algo deben tener de común cuando ambas proceden del mismo origen: el aire. Globos y aviones encuentran su apoyo *en el aire,* circunstancia que los empareja entre sí, al mismo tiempo que los separa del cohete. Acción del aire es el *empuje,* y acción del aire es la *sustentación.* ¿Son dos acciones realmente distintas, o son más bien dos efectos de una misma acción? Nos proponemos presentar aquí una teoría unificada que abona la segunda alternativa. En el fondo no se trata de ninguna novedad; es lo mismo que dicen todos los libros; sólo la forma que le damos es original, pero entendemos que por no habérsele dado esta forma ha podido pasar desapercibida, para muchos, la comunidad de naturaleza entre *empuje* y *sustentación,* que nos proponemos poner de relieve, y que en la forma corriente de exposición queda demasiado enmascarada.

Consideremos primero un flúido incompresible (líquido) en reposo y con temperatura uniforme. En este caso existe siempre una superficie libre, cuyo nivel a contar desde el fondo llamaremos H. La presión en un punto de cota z vale:

$$p = g\rho\,(H - z) \qquad [1]$$

(g = intensidad de la gravedad; ρ = densidad del flúido), y el gradiente:

$$\gamma \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\partial p}{\partial z} = +g\rho \\[2mm] -\dfrac{\partial p}{\partial x} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \qquad [2]$$

es un vector dirigido verticalmente hacia arriba, que tiene el mismo valor en todos los puntos. Si se puede despreciar la variación de g, su módulo será proporcional a la densidad del flúido. En vez de la coordenada z (altura geométrica) puede introducirse el geopotencial φ (altura dinámica), definido por la ecuación:

$$d\varphi = g\,.\,dz,$$

y entonces la primera fórmula [2] toma la forma:

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\rho,$$

exacta siempre.

Consideremos ahora una superficie cerrada ideal en el interior del flúido (fig. 1). El gradiente de presión es una fuerza aplicada a la unidad del volumen. Por consiguiente, la resultante de estas fuerzas que actúa sobre la porción de flúido limitada por la citada superficie, se obtendrá multiplicando su volumen V por el valor del gradiente:

$$E = V \cdot \gamma.$$

Esta resultante es el empuje de Arquímedes.

Si ahora suprimimos el flúido contenido dentro del recinto C y lo sustituímos por un cuerpo cualquiera de las mismas dimensiones, y consideramos como si las fuerzas del gradiente estuviesen localizadas en el espacio y actuasen sobre cualquier volumen, con independencia de su contenido, dicho cuerpo resultará sometido al mismo empuje, antes calculado. No se crea que estas fuerzas del gradiente que se suponen actuar en el interior de un cuerpo extraño sean una ficción matemática. Cualquiera que sea el cuerpo, en virtud de su elasticidad se establece una distribución de presiones internas, condicionada a los esfuerzos recibidos a través de su superficie exterior, y esta distribución depende evidentemente de sus parámetros geométricos; es decir, de su forma, como demostraremos después en general; y será equivalente a la que resultaría si el volumen ocupado por el cuerpo estuviese lleno del mismo flúido que la vasija, con lo cual el gradiente de presión estará perfectamente definido en todos los puntos. En el caso del flúido incompresible que estamos considerando no hay dificultad ninguna en extender al interior de un cuerpo extraño el campo del gradiente; siendo éste un campo uniforme en todo el espacio ocupado por el flúido, es evidente que también lo será en el interior del cuerpo. Llevando a [3] el valor [2] de γ, se obtiene:

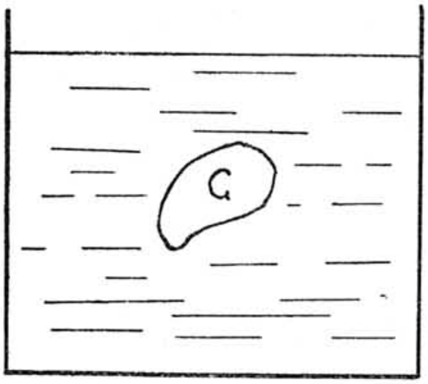

Fig. 1.

$$E = -V \cdot \rho \cdot g = -Mg = -P$$

(M = masa, P = peso); es decir, *el empuje es igual y de signo contrario al peso de una masa de flúido de las mismas dimensiones que el cuerpo sumergido*, que es el enunciado clásico del principio de Arquímedes.

Si la temperatura del líquido no es uniforme y suponemos que las superficies isotermas sean planos horizontales, habrá un gradiente vertical de temperatura, y la densidad ρ dependerá de z. Supongamos que sea función lineal:

$$T_z = T_o - \alpha z$$

(T_z = temperatura a la altura z, T_o = temperatura en el fondo, α = gradiente vertical de temperatura): la densidad lo será también con mucha aproximación, gracias a la pequeñez de β:

$$\rho_z = \frac{\rho_o}{1 - \alpha \beta z} \simeq \rho_o (1 + \alpha \beta z)$$

(ρ_z = densidad a la altura z, β = coeficiente de dilatación).

La prolongación de las superficies isotermas en el interior del cuerpo, y con ello la distribución del gradiente de presión en dicho interior, no ofrece tampoco ninguna dificultad. El empuje se calculará por una integración:

$$E = -\int_V g \rho \cdot d\tau = -g \rho_o \int_V (1 + \alpha \beta z) \, d\tau \quad [5]$$

($d\tau$ = elemento de volumen). La integración debe extenderse a todo el espacio ocupado por el cuerpo.

* * *

Consideremos en segundo lugar un flúido compresible (gas) en reposo. En este caso existe o no superficie libre según que el gradiente vertical medio de temperatura sea menor o mayor que $-\frac{g}{R}$ (gradiente autoconvectivo) (R = constante de los gases). Supondremos que de todos modos la distribución de temperaturas venga dada por la misma función lineal:

$$T_z = T_o - \alpha z,$$

con lo cual las superficies isotermas continúan siendo planos horizontales, y por consiguiente, las superficies isopígneas (de igual densidad) y las isobáricas, también. Ahora la densidad no depende solamente de la temperatura, sino también de la presión, de acuerdo con la ecuación de los gases:

$$\rho = \frac{p}{R\,T}.$$

Sin embargo, teniendo en cuenta que vale también la ecuación politrópica:

$$p = p_o \cdot \left(\frac{T}{T_o}\right)^{\frac{g}{\alpha R}}$$

se puede eliminar la presión, resultando ρ como función de z sola:

$$\rho = \frac{p_o}{R\,T_o^{\frac{g}{\alpha R}}} \cdot (T_o - \alpha z)^{\frac{g}{\alpha R} - 1}$$

Si puede αz considerarse pequeño con relación a T_o, puede escribirse aproximadamente:

$$\rho \simeq \rho_o - k z,$$

$$\left(k = \frac{p_o\,(g - \alpha R)}{R^2 \,.\, T^{\frac{g}{\alpha R}}}\right),$$

y todo lo dicho antes se aplica a este caso.

No se olvide que el cálculo de la densidad escalar no nos interesa por sí mismo, sino por su proporcionalidad con el módulo del vector gradiente de presión:

$$\gamma = - g\,\rho.$$

El empuje total viene expresado con toda generalidad por la integral:

$$E = \int_V \gamma \,.\, d\tau. \qquad [6]$$

* * *

La sustentación sobre un ala de envergadura infinita se calcula, como es sabido, sustituyendo el perfil por un círculo adecuado y tratándolo como problema de dos dimensiones. La distribución de las líneas de corriente alrededor de este círculo, supuesta potencial, se obtiene por superposición de otras tres distribuciones potenciales elementales, a saber: un dipolo, una traslación sólida y una rotación potencial, salvo en el origen de coordenadas, donde hay un torbellino finito (figura 2): Las componentes cartesianas de la velocidad, tomando el eje de abscisas paralelo a la traslación y el origen en el centro del círculo, serán:

$$u = V + \frac{V R^2 (z^2 - x^2)}{(z^2 + x^2)^2} + \frac{V'\,R\,z}{z^2 + x^2}$$

$$v = - \frac{2\,V R^2\,z\,.\,x}{(z^2 + x^2)^2} - \frac{V'\,R\,x}{z^2 + x^2} \qquad [7]$$

(V = velocidad en el infinito, R = radio del círculo, V' = velocidad periférica de la rotación). El primer término representa la traslación; el segundo, el dipolo, y el tercero, la rotación.

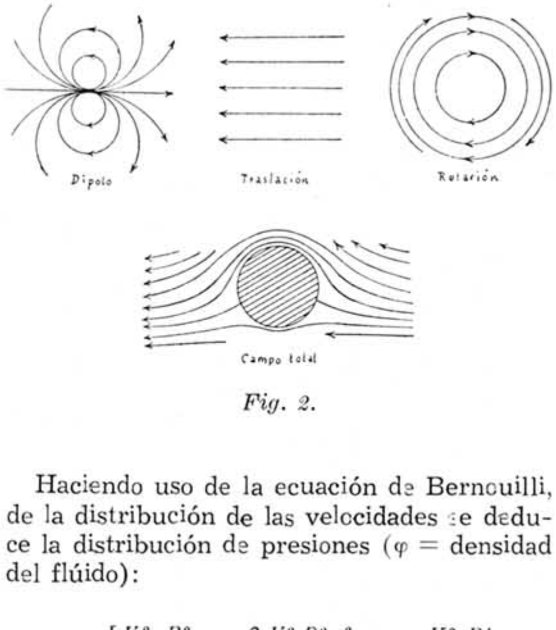

Fig. 2.

Haciendo uso de la ecuación de Bernouilli, de la distribución de las velocidades se deduce la distribución de presiones (φ = densidad del flúido):

$$p = \rho \,.\, \left[\frac{V^2\,R^2}{z^2 + x^2} - \frac{2\,V^2 R^2 z^2}{(z^2 + x^2)^2} - \frac{V^2\,R^4}{2\,(z^2 + x^2)^2} - \frac{V'^2\,R^2}{2\,(z^2 + x^2)} - \frac{V\,V'\,R^3\,z}{(z^2 + x^2)^2} - \frac{V\,V'\,R\,z}{z^2 + x^2}\right]. \qquad [8]$$

En los puntos del contorno ($x^2 + z^2 = R^2$), resulta:

$$p = \rho \,.\, \left[- 2\,\frac{V^2}{R^2}\,z^2 - 2\,\frac{V V'}{R}\,z + (V^2 - V'^2)\right]. \qquad [8']$$

Es de observar que esta expresión resulta independiente de x, lo cual significa que dos puntos de la circunferencia, simétricos con relación al eje vertical, sufren la misma presión; justificándose así la prolongación de las isobaras en el interior del cuerpo por rectas horizontales (fig. 3).

Derivando [8′] obtendremos el gradiente en dicho interior:

$$\gamma = -\frac{d\,\bar{p}}{d\,z} = \left(4\,\frac{V^2}{R^2}\,z + 2\,\frac{VV'}{R}\right)\rho. \qquad [9]$$

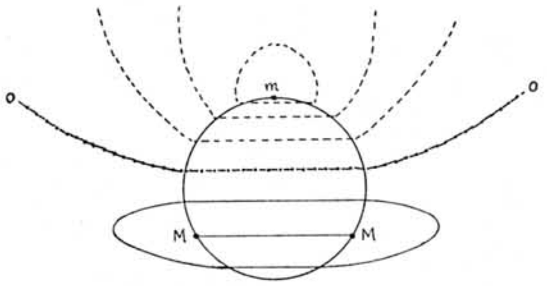

Fig. 3.

Tomaremos como elemento de volumen la porción de cilindro comprendida entre dos planos horizontales distantes dz (fig. 4), que vale:

$$d\tau = 2\sqrt{R^2 - z^2}\,.\,d\,z.$$

Multiplicando por el gradiente, e integrando entre $-R$ y $+R$, obtendremos la fuerza resultante aplicada al volumen total del cilindro; es decir, la sustentación por unidad de envergadura:

$$S = \int_{-R}^{+R} \gamma\,.\,d\tau = 4\,\rho \int_{-R}^{+R} \left(\frac{VV'}{R} + 2\,\frac{V^2}{R^2}\,z\right)\,.$$

$$.\,\sqrt{R^2 - z^2}\,.\,dz = 4\,\rho\,.\left[\frac{VV'}{R}\,.\int_{-R}^{+R}\sqrt{R^2 - z^2}\,.\,d\,z\,+\right.$$

$$\left. + \frac{V^2}{R^2}\int_{-R}^{+R} 2\,z\,.\,\sqrt{R^2 - z^2}\,.\,d\,z\right] =$$

$$= 4\,\rho\,.\left[\frac{R}{2}\left(\text{arc sen}\,.\,\frac{z}{R} + \frac{z}{R}\sqrt{1 - \frac{z^2}{R^2}}\right) -\right.$$

$$\left. -\,\frac{2}{3}\,\frac{V^2}{R}\sqrt{\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)^3}\,\right]_{-R}^{+R} =$$

$$= 2\,\pi\,R\,V'\,.\,V\,.\,\rho. \qquad [10]$$

Observando que $2\,\pi\,R\,V'$ representa la circulación de la velocidad a lo largo del contorno, que designaremos por C; la fórmula anterior toma la forma:

$$S = \rho\,.\,C\,.\,V \qquad [11]$$

que es la famosa ecuación de Kuta-Schukowsky.

Por representación conforme el círculo se transforma en un perfil arbitrario y el exterior de aquél en el exterior de éste, de tal manera que las líneas de corriente del flúido alrededor de dicho perfil son las imágenes de las líneas de corriente alrededor del círculo. Si designamos por ds la distancia entre dos puntos infinitamente próximos en el plano del círculo, y por ds' la distancia entre los puntos correspondientes en el plano del perfil, la razón de semejanza infinitesimal valdrá:

$$r = \frac{ds'}{ds} \qquad [12]$$

variable de un par a otro de puntos correspondientes. En particular, el intervalo que separa dos líneas de corriente de parámetros φ y $\varphi + d\,\varphi$, que llamaremos dn, y el de las líneas correspondientes, que llamaremos dn',

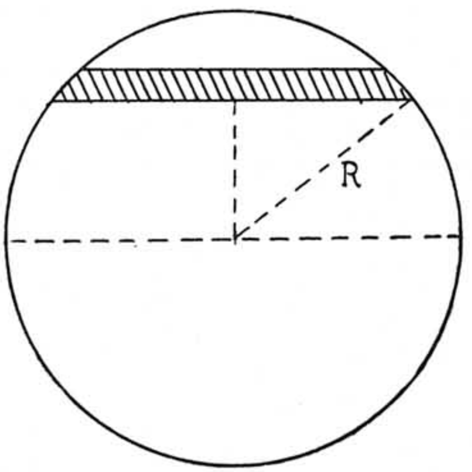

Fig. 4.

están en dicha razón r, variable a lo largo de dichas líneas. Los cocientes diferenciales $\frac{d\,\varphi}{d\,n}$ y $\frac{d\,\varphi}{d\,n'}$ representan la velocidad del flúido en dos puntos correspondientes, y como la función de corrientes φ tiene el mismo valor en ambos planos, podremos escribir:

$$\frac{v'}{v} = \frac{d\,\varphi}{dn'} : \frac{d\,\varphi}{d\,n} = \frac{1}{r}. \qquad [13]$$

Puesto que la velocidad en el infinito ha de ser la misma, tanto para el plano del círculo como para el del perfil, se deduce:

$$\text{lím } r = 1 \text{ (en el infinito)}.$$

La circulación de la velocidad entre dos puntos $A\,B$, a lo largo de una curva arbitraria que pasa por ellos, se conserva en la transformación. En efecto, si designamos por C el valor de la circulación, y señalamos por medio de acentos los elementos que corresponden al plano del perfil, se tendrá:

$$c' = \int_{A'}^{B'} v' \,.\, d\,s' = \int_{A}^{B} \frac{v}{r} \,.\, r\,d\,s = \int_{A}^{B} v \,.\, d\,s = C. \qquad [15]$$

Por otra parte, no conservándose la velocidad tampoco se conserva la presión. La presión dinámica en un punto del perfil viene expresada por la ecuación de Bernouilli:

$$p' - P = \frac{1}{2}\,\rho\,(V^2 - v'^2) \quad \text{(perfil propuesto).}$$

$$p - P = \frac{1}{2}\,\rho\,(V^2 - v^2) \quad \text{(perfil circular).}$$

(V = velocidad en el infinito, P = presión en el infinito).

Las diferencias de presión entre dos puntos serán:

$$\begin{aligned} p' - p'_1 &= \frac{1}{2}\,\rho\,(v_1'^2 - v'^2), \\ p - p_1 &= \frac{1}{2}\,\rho\,(v_1^2 - v^2); \end{aligned} \qquad [16]$$

y teniendo en cuenta [13], para puntos infinitamente próximos:

$$\frac{d\,p'}{d\,p} = \frac{1}{r^2}. \qquad [16']$$

En cuanto al gradiente, se deduce de aquí:

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{d\,p'}{d\,n'} : \frac{d\,p}{d\,n} = \frac{1}{r^3}. \qquad [17]$$

Vemos, pues, que con la transformación el gradiente varía en razón inversa del cubo de la razón de semejanza. Para comprender cómo a pesar de eso la sustentación se conserva, recordemos que tampoco la velocidad se conserva, y, sin embargo, la circulación sí; además, siendo el gradiente un vector, no sólo cambia en la transformación su valor absoluto, sino también su dirección, la cual es siempre normal a la isobara, de tal manera que al efectuar la composición para llegar a la resultante, o sea a la sustentación, aparecen compensaciones parciales y eliminación final de la razón de semejanza; pero sobre

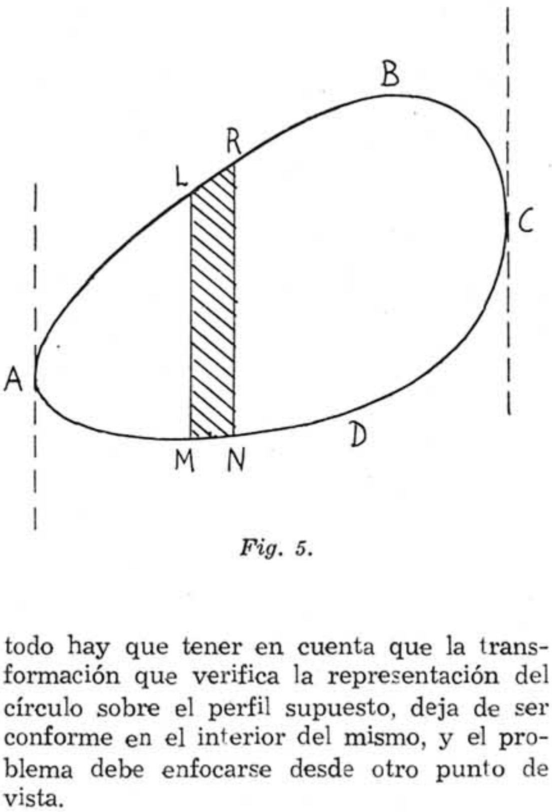

Fig. 5.

todo hay que tener en cuenta que la transformación que verifica la representación del círculo sobre el perfil supuesto, deja de ser conforme en el interior del mismo, y el problema debe enfocarse desde otro punto de vista.

La sustentación, resultante de las fuerzas de gradiente aplicadas al volumen del cuerpo, es, naturalmente, un vector, del cual pueden calcularse por separado sus componentes horizontal y vertical. Para la componente vertical hay que evaluar la integral (fig. 5):

$$S_z = \int_{ABCD} \gamma_z \, . \, d\tau \qquad [18]$$

(γ_z = componente vertical del gradiente), extendida al recinto encerrado por el perfil. Dividiendo el recinto en fajas infinitesimales mediante un sistema de rectas paralelas verticales, cualquiera que sea la distribución de la presión en el interior del recinto, la integral simple relativa al trapecio curvilíneo $MLRN$, de anchura dx, valdrá:

$$\int_{MLRN} \gamma_z \, . \, d\tau = dx \int_{ML} \gamma_z \, . \, dz = (p_L - p_M) \, . \, dx.$$

Como tanto p_L (presión en un punto de la línea ABC) como p_M (presión en un punto de ADC) son sólo funciones de x, bastará una nueva cuadratura para obtener S_z:

$$S_z = \int_{ABCD} \gamma_z \, . \, d\tau = \int_{AC} (p_L - p_M) \, dx. \qquad [19]$$

Análogamente, la componente horizontal S_x se calculará mediante la integral:

$$S_x = \int_{ABCD} \gamma_x \, . \, d\tau. \qquad [20]$$

En resumen: la resultante de las fuerzas del gradiente aplicadas al cilindro de altura unidad, y que tiene por base el área $ABCD$, es equivalente a la de las fuerzas de presión aplicadas a la superficie cilíndrica que lo limita. Repetimos que el gradiente es una fuerza de volumen, mientras que la presión es una fuerza de superficie. La anterior transformación equivale a la sustitución de una integral de volumen por una de superficie; es decir, en cierto modo, a una aplicación del teorema de Gauss: En efecto: hablando en general, la proyección de un vector sobre un eje fijo es un escalar, y recíprocamente, el producto de un escalar por un vector unitario de dirección constante es un vector. Sea, pues, γ un vector que deriva del potencial p. Llamemos p_z al vector de módulo p y dirección z y γ_z a la componente (escalar) del vector γ en la misma dirección. El teorema de Gauss se expresa así:

$$\int_V \text{div}\, p_z \, . \, d\tau = \int_S p_z \, . \, d\sigma.$$

La integral del segundo miembro es doble y se extiende a una superficie cerrada cualquiera; el . significa en ella producto escalar, siendo $d\sigma$ un vector cuyo módulo es igual al elemento de superficie, y su dirección, la de la normal exterior en un punto de la misma. La del primer miembro es triple, y sus dos factores son escalares; se extiende al volumen encerrado por dicha superficie. Ahora bien:

$$\text{div}\, p_z = \frac{\partial p_z}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} = \text{grad}_z\, p = \gamma_z;$$

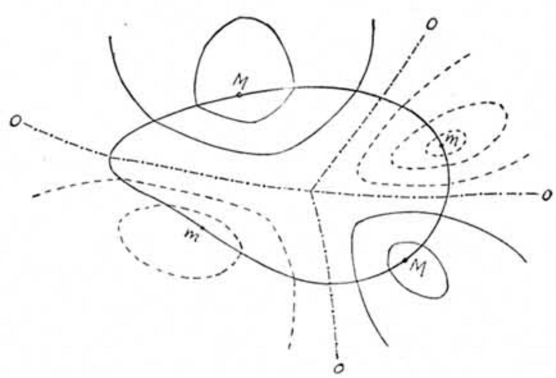

Fig. 6.

y por consiguiente,

$$\int_V \gamma_z \, . \, d\tau = \int_S p_z \, . \, d\sigma; \qquad [21]$$

y si nos limitamos a dos dimensiones, y nos referimos a la figura 5, volvemos a encontrar:

$$\int_{ABCD} \gamma_z \, . \, dx \, . \, dz = S_z = \int_{AC} (p_L - p_M) \, dx.$$

Por otra parte, se demuestra en Aerodinámica (véase, por ejemplo, Fuchs: «Aerodinámica») que la resultante de las presiones ejercidas por el aire alrededor de un perfil arbitrario es la misma que para el perfil circular, imagen suya por transformación conforme, y recordando que en la transformación no varían ni la circulación de la velocidad ni la velocidad en el infinito, que son los dos factores que dan la sustentación en este caso, resulta generalizada la fórmula de Kuta-Schukowsky y reducida a una consecuencia de nuestras fórmulas [18] y [20].

Con esto hemos conseguido nuestro objeto: calcular la sustentación a partir de la misma ecuación [6] que da el empuje. La ecuación [21] es completamente general y puede aplicarse en todos los casos.

Consideremos un cuerpo cualquiera sumergido en un flúido (fig. 6). La presión que éste ejerce sobre su superficie se compone de dos partes: una componente estática, debida al propio peso del flúido, y una componente dinámica, debida a su velocidad, sin que por sus efectos, que son idénticos, puedan distinguirse. El campo total presentará máximos y mínimos situados sobre la superficie del cuerpo, alrededor de los cuales discurren las superficies isobáricas, quedando aquélla dividida en zonas de compresión y de depresión, separadas entre sí por líneas neutras. Estas superficies isobáricas deben prolongarse por el interior del cuerpo, siendo indiferente el curso que sigan en dicho interior, con la única condición de no cortarse mutuamente. De aquí se deduce un campo de gradientes, y de aquí la sustentación. Para cada una de sus tres componentes cartesianas es válida una ecuación análoga a la [21].

En lugar de dicha ecuación [21] escribiremos la ecuación vectorial:

$$\vec{F} = \int_V \vec{\gamma}_e\, d\tau + \int_V \vec{\gamma}_d \cdot d\tau; \qquad [22]$$

o las tres ecuaciones cartesianas equivalentes:

$$F_x = \int_V \gamma_{ex} \cdot d\tau + \int_V \gamma_{dx} \cdot d\tau,$$

$$F_y = \int_V \gamma_{ey} \cdot d\tau + \int_V \gamma_{dy} \cdot d\tau, \qquad [22']$$

$$F_z = \int_V \gamma_{ez} \cdot d\tau + \int_V \gamma_{dz} \cdot d\tau,$$

separando el gradiente estático (γ_e) del gradiente dinámico (γ_d)

Cuando la velocidad es despreciable, se anula el segundo sumando, y la acción del flúido se reduce al empuje:

$$\vec{F} = \vec{E}.$$

Cuando la presión estática puede tomarse como constante y se cumplen las condiciones de validez de la ecuación de Kuta-Schukowsky, dicha acción se reduce a la sustentación, normal al desplazamiento de la corriente no perturbada:

$$\vec{F} = \vec{S}.$$

Las superficies isobáricas del campo estático son planos horizontales; es decir, $\gamma_x = \gamma_y = 0$. Si reservamos el nombre de sustentación (S) para la componente vertical del campo dinámico, y designamos por R su componente horizontal, tendremos en general:

$$F_x = R_x = \int_V \gamma_{dx} \cdot d\tau,$$

$$F_y = R_y = \int_V \gamma_{dy} \cdot d\tau,$$

$$F_z = E + S = \int_V \gamma_z \cdot d\tau.$$

En resumen: Que sea globo o nube, o que sea avión, cualquier cuerpo sumergido en la atmósfera sufre por parte de ésta un empuje de intensidad y dirección expresados por la sencilla ecuación:

$$\vec{F} = \int_V \vec{\gamma} \cdot d\tau;$$

en la cual γ es el gradiente de presión que se establecerá dentro del volumen ocupado por el cuerpo si éste fuese sustituído por una masa de aire en equilibrio, con la presión exterior en cada punto de su superficie. Es una generalización del principio de Arquímedes, que basta por sí sola para dar cuenta de las más complicadas acciones del aire sobre cuerpos cualesquiera en cualesquiera condiciones.